

# Das Federpendel mit verschiedenen Arten von Reibung

Der vorliegende Artikel beschreibt das Schwingen eines Federpendels mit den 3 verschiedenen Arten von Reibung. Als Grundlage wird vorab das ungedämpfte Federpendel behandelt.

Danach wird als erster Fall mit Stokesscher Reibung (Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit, Reibung eines Körpers in einem Fluid ohne Verwirbelungen, also laminar) behandelt. Dieser Fall stellt quasi den Standardfall dar, der in vielen Lehrwerken beschrieben wird, da dies der einzige Fall ist, bei dem man die mathematische Theorie zur Lösung von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung ohne weitere Überlegungen anwenden kann. Wir beschränken uns hier ausschließlich auf den unterkritisch gedämpften Fall, bei dem also eine gedämpfte harmonische Schwingung entsteht.

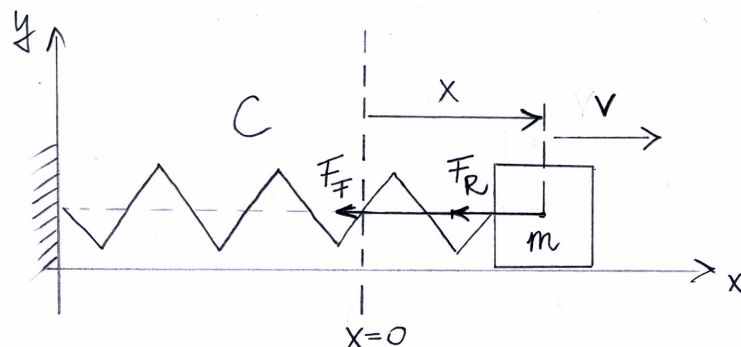
Der zweite behandelte Fall ist jener mit Coulombscher Reibung (Reibungskraft unabhängig von der Geschwindigkeit, trockene Reibung bzw. Roll- und Gleitreibung). Hier existiert, obwohl die Differentialgleichung auf den ersten Blick nicht „so aussieht“, ebenfalls eine analytische Lösung die mittels physikalischer Überlegungen hergeleitet wird, nachdem diese durch eine vorherige numerische Lösung motiviert wird.

Als Abschluss wird kurz der Fall mit Newtonscher Dämpfung (Reibungskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, Reibung eines Körpers in einem Fluid mit Verwirbelungen, also turbulent) erörtert. Hier ist aufgrund der nichtlinearen Differentialgleichung nur eine numerische Lösung zweckmäßig.

## 1 Das ungedämpfte Pendel

Als Vorprogramm für die Fälle mit Reibung wird vorab der reibungsfreie Fall behandelt, um die Grundlagen zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung zu erarbeiten.

Skizze:



Bemerkung: Bei Coulombscher Reibung wäre es besser den Vektor der Reibungskraft  $F_R$  bei der Kontaktfläche zwischen Pendelkörper und Unterlage einzuzeichnen.

Gemäß der Skizze folgt mittels des 2. Newtonschen und des Hookeschen Gesetzes für die Federkraft  $F_F = -Cx$  (Die Reibungskraft  $F_R$  ist im ungedämpften/reibungsfreien Fall Null zu setzen.)

$$ma_x = \sum F \quad (1)$$

$$m\ddot{x} = -Cx, \quad (2)$$

wobei  $m$  die Masse des Pendelkörpers (die Feder wird als masselos betrachtet),  $a_x = \ddot{x}$  die Beschleunigung in  $x$ -Richtung,  $C$  die Federkonstante und  $x$  die Auslenkung aus der Ruhelage beschreiben. Umgeformt erhält man

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}x = 0. \quad (3)$$

Diese gewöhnliche lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann man analytisch lösen.

## 1.1 Analytische Lösung Variante 1

Gesucht ist somit jene Funktion(en), die sich bei zweimaliger Ableitung bis auf das Vorzeichen selbst reproduziert. Das sind die cos- und die sin-Funktion. Mit dem Ansatz ( $x = x(t)$ )

$$x = \cos(\omega_0 t) \quad (4)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\omega_0 \sin(\omega_0 t) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) \quad (6)$$

ergibt sich eingesetzt

$$-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \frac{C}{m} \cos(\omega_0 t) = 0 \quad (7)$$

bzw.

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{C}{m}}, \quad (8)$$

wobei  $\omega_0$  die Kreisfrequenz der ungedämpften freien Schwingung bezeichnet. D.h., dass unter der Bedingung, dass der letzte Zusammenhang gilt, die Bewegungsgleichung (3) durch unseren Ansatz gelöst wird. Eine analoge Rechnung mit dem Ansatz

$$x = \sin(\omega_0 t) \quad (9)$$

zeigt, dass die sin-Funktion ebenfalls Lösung der Differentialgleichung (3) ist. Mathematisch ausgedrückt bilden die beiden Lösungen ein Fundamentalsystem. Durch Einsetzen kann man zeigen, dass die Kombination

$$x = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) \quad (10)$$

der beiden Fundamentallösungen ebenfalls Lösung der obigen Bewegungsgleichung (3) ist, wobei  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmende Konstante für die beiden Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0$  sind. Daraus folgt

$$\dot{x} = -C_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + C_2 \omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (11)$$

$$\ddot{x} = -C_1 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - C_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t). \quad (12)$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung (3)

$$-C_1 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) - C_2 \omega_0^2 \sin(\omega_0 t) + \frac{C}{m} (C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)) = 0, \quad (13)$$

$$-\omega_0^2 (C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)) + \frac{C}{m} (C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)) = 0 \quad (14)$$

$$(15)$$

erhält man wiederum

$$\omega_0 = \pm \sqrt{\frac{C}{m}}, \quad (16)$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmt man wie folgt aus den obigen Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = C_1 \underbrace{\cos(0)}_{=1} + C_2 \underbrace{\sin(0)}_{=0} = C_1 = x_0 \quad (17)$$

bzw.

$$\dot{x}(t=0) = -C_1 \omega_0 \underbrace{\sin(0)}_{=0} + C_2 \omega_0 \underbrace{\cos(0)}_{=1} = C_2 \omega_0 = v_0 \quad (18)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}. \quad (19)$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (20)$$

## 1.2 Analytische Lösung Variante 2

Eine Behandlung mittels der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung liefert mit dem „Standardansatz“

$$x = x(t) = \tilde{C}e^{\lambda t} \quad (21)$$

Folgendes. Bildet man die 2. Ableitung

$$\ddot{x} = \tilde{C}\lambda^2 e^{\lambda t} \quad (22)$$

und setzt man diese und die Funktion selbst in die Bewegungsgleichung (3) ein, erhält man

$$\tilde{C}\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{C}{m}\tilde{C}e^{\lambda t} = 0. \quad (23)$$

Daraus folgt vereinfacht und umgeformt sowie unter Berücksichtigung von (16)

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{C}{m}}i = \pm\omega_0 i, \quad (24)$$

wobei  $i$  für die imaginäre Einheit steht.

Setzt man  $\lambda_{1,2}$  in (21) ein, erhält man als vollständige Lösung für (3)

$$x = \tilde{C}_1 e^{i\omega_0 t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (25)$$

Diese lässt sich mittels der Formel von Euler  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$  umschreiben zu

$$x = \tilde{C}_1 (\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)) + \tilde{C}_2 (\cos(-\omega_0 t) + i\sin(-\omega_0 t)) \quad (26)$$

$$= \underbrace{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)}_{=C_1} \cos(\omega_0 t) + i \underbrace{(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)}_{=C_2} \sin(\omega_0 t) \quad (27)$$

$$= C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t), \quad (28)$$

und ist somit ident mit (10). Die Bestimmung der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  passend zu den Anfangsbedingungen ist im vorigen Abschnitt bereits ausgeführt worden.

## 2 Das Federpendel mit Stokesscher Reibung - der Standardfall

Mittels des 2. Newtonschen Gesetzes ergibt sich nun

$$m\ddot{x} = -D\dot{x} - Cx, \quad (29)$$

wobei  $D$  die Dämpfungskonstante im Term für die Reibungskraft  $F_R = -D\dot{x}$  bezeichnet. Umgeformt erhält man

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}\dot{x} + \underbrace{\frac{C}{m}}_{=\omega_0^2} x = 0. \quad (30)$$

### 2.1 Analytische Lösung

Mit dem Ansatz (21), sowie der 1. und der 2. Ableitung

$$\dot{x} = \tilde{C}\lambda e^{\lambda t} \quad (31)$$

$$\ddot{x} = \tilde{C}\lambda^2 e^{\lambda t}, \quad (32)$$

erhält man unter Berücksichtigung von (16) eingesetzt in (30)

$$\tilde{C}\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{D}{m}\tilde{C}\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 \tilde{C}e^{\lambda t} = 0. \quad (33)$$

Daraus ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\tilde{C}e^{\lambda t} \left( \lambda^2 + \frac{D}{m}\lambda + \omega_0^2 \right) = 0 \quad (34)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{D}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (35)$$

mit der Lösung

$$\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \omega_0^2}. \quad (36)$$

Eine periodische Schwingung kommt nur zustande, wenn die Diskriminante  $\frac{D^2}{4m^2} - \omega_0^2 < 0$  ist. Daraus folgt

$$\lambda_{1,2} = -\underbrace{\frac{D}{2m}}_{=\gamma} \pm \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{D^2}{4m^2}}}_{=\omega} i = -\gamma \pm \omega i, \quad (37)$$

wobei  $\gamma$  für den Dämpfungsparameter,  $\omega$  für die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung und  $i$  (wieder) für die imaginäre Einheit stehen. Setzt man die beiden Lösungen  $\lambda_{1,2}$  in den Ansatz (21) ein, erhält man insgesamt

$$x = \tilde{C}_1 e^{(-\gamma + \omega i)t} + \tilde{C}_2 e^{(-\gamma - \omega i)t} \quad (38)$$

$$= e^{-\gamma t} (\tilde{C}_1 e^{i\omega t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega t}). \quad (39)$$

Mit der Eulerschen Identität  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$  kann man den Term in der Klammer (wie im vorigen Abschnitt gezeigt) zu  $C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$  umformulieren (mit  $\omega$  statt  $\omega_0$ ). Die Lösung lautet somit

$$x = e^{-\gamma t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)), \quad (40)$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{D}{2m} \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{D^2}{4m^2}}. \quad (41)$$

Mit den Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$  kann man (wie im reibungslosen Fall) die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen. Setzt man die Anfangsbedingungen in die Lösung und deren 1. Ableitung ein, erhält man

$$x(t=0) = \underbrace{e^0}_{=1} (C_1 \underbrace{\cos(0)}_{=1} + C_2 \underbrace{\sin(0)}_{=0}) = C_1 = x_0 \quad (42)$$

und

$$\dot{x} = -\gamma e^{-\gamma t} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) + e^{-\gamma t} (-C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t)) \quad (43)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t=0) = -\gamma \underbrace{e^0}_{=1} (C_1 \underbrace{\cos(0)}_{=1} + C_2 \underbrace{\sin(0)}_{=0}) + \underbrace{e^0}_{=1} (-C_1 \omega \underbrace{\sin(0)}_{=0} + C_2 \omega \underbrace{\cos(0)}_{=1}) = -\gamma C_1 + \omega C_2 = v_0 \quad (44)$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega}. \quad (45)$$

Eingesetzt in (40) ergibt die Lösung

$$x = e^{-\gamma t} \left( x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right), \quad (46)$$

$$\text{mit } \gamma = \frac{D}{2m} \text{ und } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{D^2}{4m^2}}. \quad (47)$$

### Bemerkungen:

- Man beachte, dass gemäß (37) bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung die Schwingungsfrequenz eines gedämpften Pendels kleiner ist, als jene eines identen Pendels ohne Reibung:  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{D^2}{4m^2}}$ .

- Man erkennt, dass durch den Faktor  $e^{-\gamma t}$  die Amplitude bei geschwindigkeitsproportionaler Reibung exponentiell abnimmt.
- Weitere Lösungsfälle (werden nicht näher behandelt):
  - Ist in (36) die Diskriminante  $\frac{D^2}{4m^2} - \omega_0^2 > 0$ , d.h.  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , so ist die Lösung von (30)  $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ .
  - Ist in (36) die Diskriminante  $\frac{D^2}{4m^2} - \omega_0^2 = 0$ , d.h.  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ , so ist die Lösung von (30)  $x = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$ , wobei die 2. Fundamentallösung  $x_2 = C_2 t e^{\lambda t}$  aus  $x_1 = C_1 e^{\lambda t}$  mittels Variation der Konstanten ermittelt werden kann.

## 2.2 Numerische Lösung

Für die numerische Lösung von (30) ersetzt man die Ableitung durch geeignete Differenzenquotienten auf einem Gitter mit der Schrittweite  $\Delta t$

$$\dot{x} \approx \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \quad (48)$$

$$\ddot{x} \approx \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}, \quad (49)$$

mit  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Die vollständige Diskretisierung von (30) lautet somit

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} + \frac{D}{m} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \frac{C}{m} x_i = 0, \quad (50)$$

durch Umformung erhält man

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \Delta t^2 \left( \frac{D}{m} \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} + \frac{C}{m} x_i \right). \quad (51)$$

Zum Start der Rekursion mit den Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$  benötigt man einen Taylor-Startschritt. Der Differenzenquotient 2. Ordnung für die Beschleunigung lautet

$$\ddot{x} \approx \frac{\frac{x_1 - x_0}{\Delta t} - v_0}{\frac{\Delta t}{2}}, \quad (52)$$

wodurch man eingesetzt in (30)

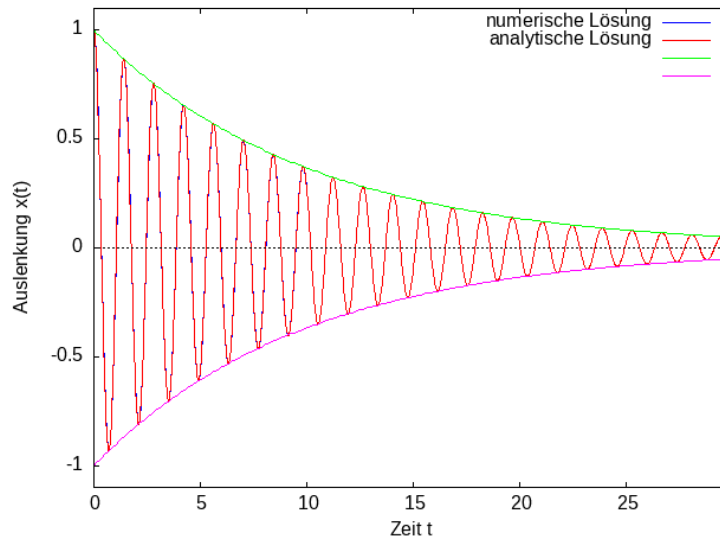
$$\frac{\frac{x_1 - x_0}{\Delta t} - v_0}{\frac{\Delta t}{2}} + \frac{D}{m} v_0 + \frac{C}{m} x_0 = 0, \quad (53)$$

bzw.

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{D}{m} v_0 + \frac{C}{m} x_0 \right). \quad (54)$$

erhält.

Der Graph der Lösung eines Beispiels zur Veranschaulichung zeigt die Übereinstimmung der numerischen und der analytischen Lösung:



### 3 Das Federpendel mit Coulombscher Reibung

Die Bewegungsgleichung des Federpendels mit Coulombscher Reibung

$$F_R = \mu F_N = \mu F_G = \mu mg \quad (55)$$

lautet

$$m\ddot{x} + Cx = -\text{sign}(\dot{x})\mu mg, \quad (56)$$

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}x = -\text{sign}(\dot{x})\mu g. \quad (57)$$

Die Signum-Funktion  $\text{sign}(\dot{x})$  ist hier notwendig, damit die Reibungskraft stets gegen die aktuelle Bewegungsrichtung wirkt.

#### 3.1 Numerische Lösung

Als Motivation für die Suche nach einer analytischen Lösung betrachten wir zuerst die numerische Lösung und approximieren die 1. und 2. Ableitungen durch die zugehörigen Differenzenquotienten (48) und (49). Wir erhalten eingesetzt in (57)

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} + \frac{C}{m}x_i = -\text{sign}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\mu g, \quad (58)$$

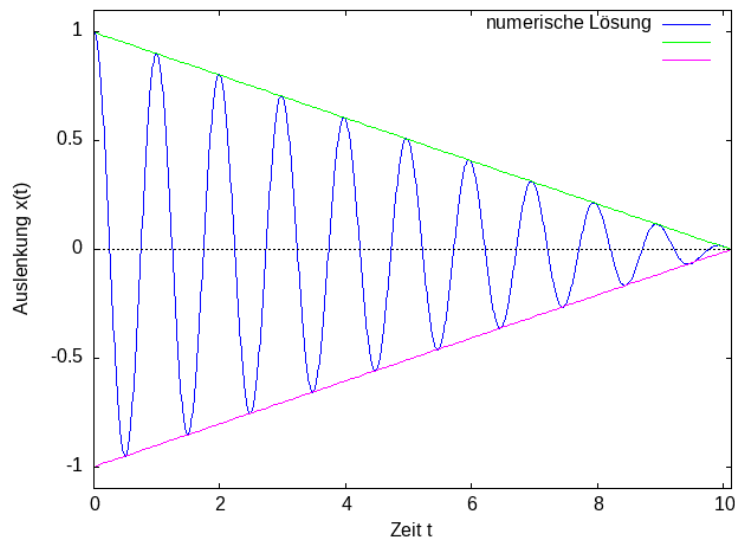
bzw.

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \Delta t^2 \left( \frac{C}{m}x_i + \text{sign}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)\mu g \right). \quad (59)$$

Für den Startschritt erhält mit Hilfe von (52)

$$x_1 = x_0 + v_0\Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{C}{m}x_0 + \text{sign}(v_0)\mu g \right). \quad (60)$$

Der Graph der Lösung eines Beispiels mit  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = 0$  sieht wie folgt aus:



Diese Lösung zeigt eine lineare Abnahme der Amplitude in Abhängigkeit der Zeit, was die Existenz einer analytischen Lösung, trotz der in der Bewegungsgleichung (57) vorhandenen sign-Funktion, nahelegt.

### 3.2 Analytische Lösung

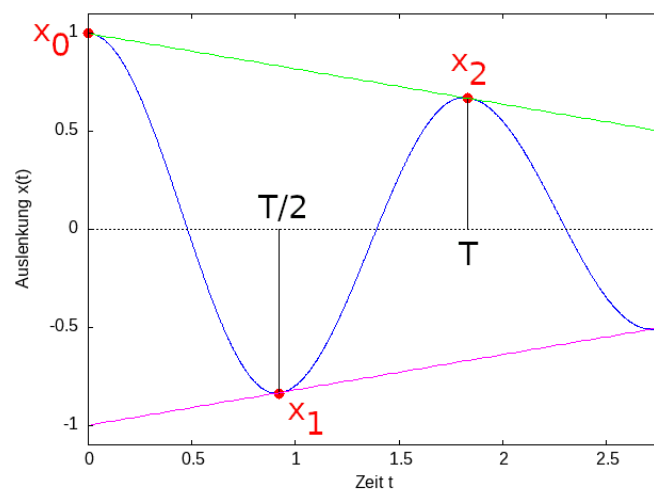
#### 3.2.1 Mit speziellen Anfangsbedingungen

Wir beschränken unsere Überlegungen vorab auf die Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = v(t=0) = 0$  (wie im obigen Graph gezeigt). Unter der Annahme (und diese wird sich später als korrekt herausstellen), dass die Frequenz bzw. die Kreisfrequenz unabhängig von der Reibungskraft  $F_R$  ist, müsste sich die Lösung wie folgt formulieren lassen

$$x = (x_0 - v_A t) \cos(\omega_0 t), \quad (61)$$

mit  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ , gemäß (16).  $v_A$  bezeichnet hierin die Geschwindigkeit, mit der die Amplitude abnimmt. Hierfür gilt es nun einen Ausdruck zu finden, der sich mit Hilfe physikalischer Überlegungen anschreiben lässt.

Skizze:



Aus der Skizze folgt mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes und der Kenntnis, dass Arbeit gleich Energiedifferenz ist

$$W = \Delta E \quad (62)$$

$$W = E_{sp}(x_0) - E_{sp}(x_1) \quad (63)$$

$$F_R x_0 + F_R x_1 = \frac{1}{2} C x_0^2 - \frac{1}{2} C x_1^2. \quad (64)$$

D.h.: Die verrichtete Reibungsarbeit ist genau der Verlust an Spannenergie  $E_{sp}$  zwischen zwei aufeinander folgenden maximalen Auslenkungen (hier  $x_0$  und  $x_1$ , aber grundsätzlich beliebig wählbar). Weiters erkennt man aus der obigen Skizze, dass die Zeitdauer zwischen  $x_0$  und  $x_1$  genau die halbe Periodendauer  $\frac{T}{2}$  ist.

Weitere Umformung ergibt

$$F_R(x_0 + x_1) = \frac{1}{2} C (x_0^2 - x_1^2) \quad (65)$$

$$\mu m g (x_0 + x_1) = \frac{1}{2} C (x_0 + x_1) \underbrace{(x_0 - x_1)}_{=\Delta x} \quad (66)$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{2\mu m g}{C}. \quad (67)$$

Mit dem bekannten Zusammenhang  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{C}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$  folgt somit für Abnahmegeschwindigkeit der Amplitude

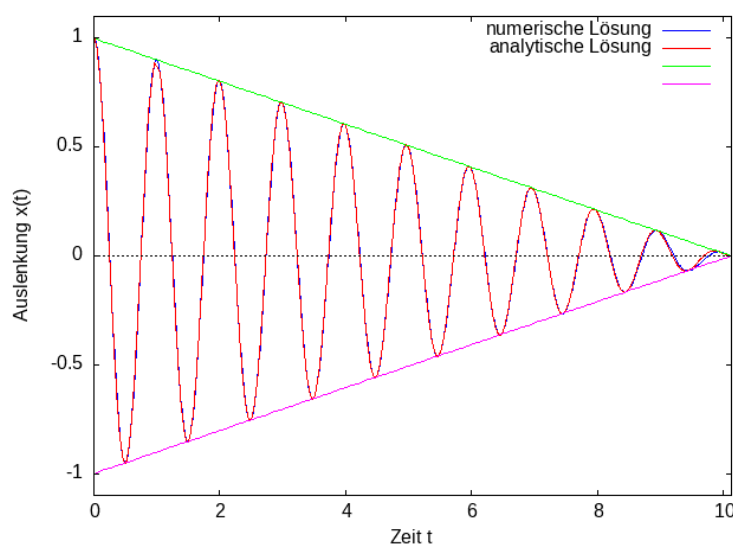
$$v_A = \frac{\Delta x}{\frac{T}{2}} = \frac{\frac{2\mu m g}{C}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}} = \frac{2\mu m g}{\pi} \sqrt{\frac{C}{m}}. \quad (68)$$

Setzt man diesen in (61) ein, erhält man

$$x = \left( x_0 - \frac{2\mu m g}{\pi} \omega_0 t \right) \cos(\omega_0 t), \quad (69)$$

$$\text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}. \quad (70)$$

Der folgende Graph zeigt die analytische und die numerische Lösung eines konkreten Beispiels:



Die Übereinstimmung der beiden Lösungen beweist die Annahme, dass bei Anwesenheit einer geschwindigkeitsunabhängigen Reibungskraft die Frequenz bzw. Kreisfrequenz einer Schwingung nicht beeinflusst wird.

### 3.2.2 Mit allgemeinen Anfangsbedingungen

Für beliebige Anfangsbedingungen  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$  lautet die Lösung der ungedämpften/reibungsfreien Schwingung (siehe (20))

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (71)$$

Um das Problem zu umgehen, wie man in den Term der 2. Fundamentallösung  $\frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$  die Abnahme der Amplitude einbaut, drückt man die Lösung durch eine einzige Winkelfunktion aus

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (72)$$

wobei  $A$  die Amplitude und  $\varphi$  die Phasenverschiebung bezeichnen. Wendet man auf der rechten Seite der letzten Beziehung den Sumpensatz  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$  an, erhält man

$$x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) = A (\sin(\omega_0 t) \cos(\varphi) + \cos(\omega_0 t) \sin(\varphi)). \quad (73)$$

Durch Ausmultiplizieren auf der rechten Seite, Ordnen der Terme und Vergleich der Koeffizienten, erkennt man

$$\underbrace{x_0}_{(a)} \cos(\omega_0 t) + \underbrace{\frac{v_0}{\omega_0}}_{(b)} \sin(\omega_0 t) = \underbrace{A \sin(\varphi)}_{(a)} \cos(\omega_0 t) + \underbrace{A \cos(\varphi)}_{(b)} \sin(\omega_0 t) \quad (74)$$

$$(a) \Rightarrow x_0 = A \sin(\varphi) \quad \text{und} \quad (b) \Rightarrow \frac{v_0}{\omega_0} = A \cos(\varphi). \quad (75)$$

Daraus folgt wiederum

$$A^2 \sin^2(\varphi) + A^2 \cos^2(\varphi) = A^2 \underbrace{(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))}_{=1} = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}, \quad (76)$$

$$\text{bzw. } \frac{A \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi)} = \tan(\varphi) = \frac{x_0}{\frac{v_0}{\omega_0}} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{x_0 \omega_0}{v_0}\right). \quad (77)$$

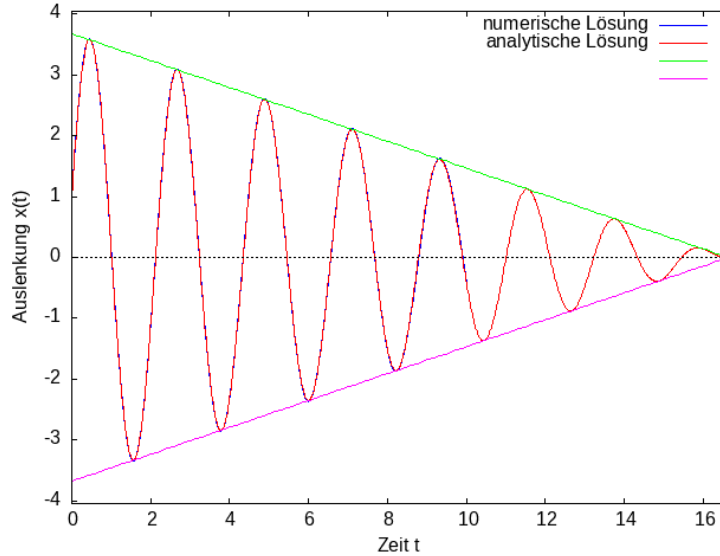
Als Gesamtlösung bei Coulombscher Reibung und allgemeinen Anfangsbedingungen unter Berücksichtigung von (68) und (72) ergibt sich

$$x = (A - v_A t) \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (78)$$

$$= \left( \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} - \frac{2\mu m g}{\pi} \omega_0 t \right) \sin\left(\omega_0 t + \arctan\left(\frac{x_0 \omega_0}{v_0}\right)\right), \quad (79)$$

$$\text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{m}}. \quad (80)$$

Der folgende Graph zeigt die analytische und die numerische Lösung eines konkreten Beispiels mit allgemeinen Anfangsbedingungen:



Die Übereinstimmung der beiden Lösungen zeigt, dass die vorangestellten Überlegungen zur Herleitung einer analytischen Lösung korrekt sind.

## 4 Das Federpendel mit Newtonscher Reibung

Bei Newtonscher Reibung gilt für die Reibungskraft

$$F_R = \frac{1}{2} \rho c_w A \dot{x}^2 \quad (81)$$

und somit für die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} + Cx = -\text{sign}(\dot{x}) \frac{1}{2} \rho c_w A \dot{x}^2, \quad (82)$$

$$\ddot{x} + \frac{C}{m} x = -\text{sign}(\dot{x}) \frac{1}{2m} \rho c_w A \dot{x}^2, \quad (83)$$

wobei  $\rho$  die Dichte des umgebenden Mediums,  $c_w$  der Widerstandsbeiwert und  $A$  die Schattenfläche (=angeströmte Fläche) bezeichnen. Die Signum-Funktion  $\text{sign}(\dot{x})$  ist hier (wie in (57)) notwendig, damit die Reibungskraft stets gegen die aktuelle Bewegungsrichtung wirkt.

Aufgrund der Nichtlinearität von (83) ist hier eine numerische Lösung die (wahrscheinlich) einzig sinnvolle Lösungsmethode. Eine einfache analytische Lösung ist nicht möglich. Wenn eine analytische Lösung angestrebt wird, ist dies eventuell über einen Reihenansatz möglich.

Für die numerische Lösung nähern wir die 1. und 2. Ableitung mittels der Differenzenquotienten (48) und (49). Wir erhalten eingesetzt in (83)

$$\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2} + \frac{C}{m} x_i = -\text{sign}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right) \frac{1}{2m} \rho c_w A \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2, \quad (84)$$

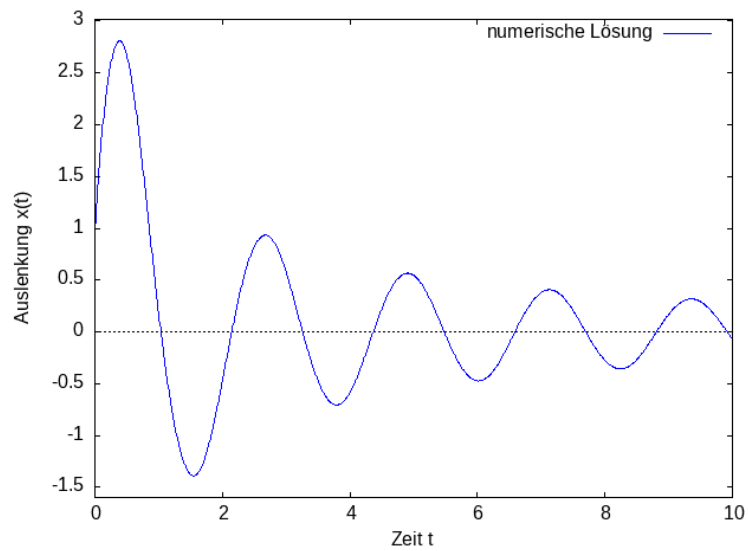
bzw. umgeformt

$$x_{i+1} = 2x_i - x_{i-1} - \Delta t^2 \left( \frac{C}{m} x_i + \text{sign}\left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right) \frac{1}{2m} \rho c_w A \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}\right)^2 \right). \quad (85)$$

Für den Startschritt erhält man mit Hilfe von (52)

$$x_1 = x_0 + v_0 \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{C}{m} x_0 + \text{sign}(v_0) \frac{1}{2m} \rho c_w A v_0^2 \right). \quad (86)$$

Der Graph der Lösung eines Beispiels mit  $x(t=0) = x_0$  und  $\dot{x}(t=0) = v_0$  sieht wie folgt aus:



Man erkennt, dass die Amplitude im Fall Newtonscher Reibung weder linear noch exponentiell abnimmt.