

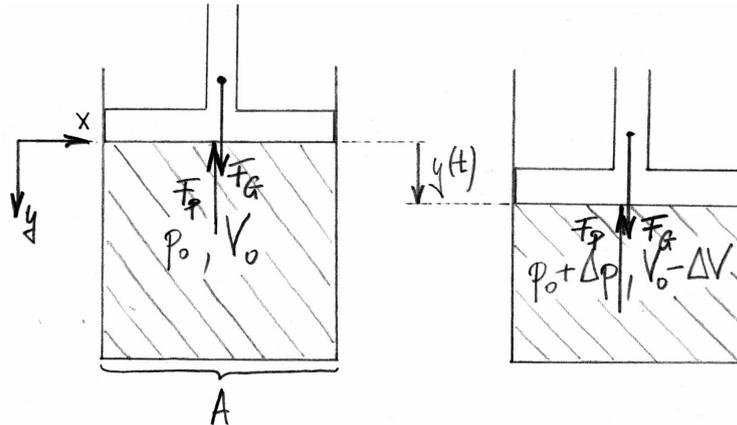
Schwingung eines luftgefederten Kolbens

Der vorliegende Artikel beschreibt das (reibungsfreie) Schwingen eines Kolbens, der einen mit Gas gefüllten Zylinder verschließt. Hierzu wird im ersten Abschnitt die nichtlineare Bewegungsgleichung aufgestellt und numerisch gelöst. Der zweite Abschnitt widmet sich der Herleitung der linearisierten Bewegungsgleichung inkl. deren Lösung. Im dritten Abschnitt wird die numerische Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung mit der analytischen Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung für einen konkreten Fall verglichen.

1 Nichtlineare Betrachtung

1.1 Herleitung der nichtlinearen Bewegungsgleichung

Skizze (links... Ruhelage, rechts... ausgelenkter Zustand, Auslenkung $y = y(t)$ mit t =Zeit):



Wir betrachten einen mit einem Kolben verschlossenen Zylinder mit Querschnittsfläche A (siehe obige Skizze). Im Zylinder befindet sich ein Gas (Volumen V_0) mit dem Druck p_0 . Der Kolben hat die Masse m und somit ein Gewicht $F_G = mg$, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet. Lenkt man den Kolben um die Strecke y aus, so erhöht sich der Druck um den Betrag Δp , während sich das Volumen um den Betrag $\Delta V = Ay$ verkleinert. Überlässt man anschließend das System sich selbst, erfolgt die Schwingung so rasch, dass das Gas keine Wärme mit der Umgebung austauscht, die Zustandsänderung ist adiabatisch. Es gilt

$$pV^\kappa = \text{const.}, \quad (1)$$

wobei κ den Adiabatenexponenten bezeichnet¹.

Gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz gilt mit F_p als Bezeichnung für Druckkraft des Gases auf den Kolben

$$m\ddot{y} = F_G - F_p. \quad (2)$$

Setzt man für F_G und F_p ein, erhält man

$$m\ddot{y} = mg - \Delta p A. \quad (3)$$

Weiters gilt laut (1)

$$p_0 V_0^\kappa = (p_0 + \Delta p)(V_0 - \Delta V)^\kappa. \quad (4)$$

Formt man den letzten Zusammenhang auf

$$\Delta p = \frac{p_0 V_0^\kappa}{(V_0 - \Delta V)^\kappa} - p_0 \quad (5)$$

um und setzt die Beziehung unter Berücksichtigung von $\Delta V = Ay$ in (3) ein, erhält man die (nichtlineare) Bewegungsgleichung des Systems

$$m\ddot{y} = mg - \left(\frac{p_0 V_0^\kappa}{(V_0 - Ay)^\kappa} - p_0 \right) A. \quad (6)$$

¹Der Adiabatenexponent für Luft beträgt bei Raumtemperatur ca. 1,4.

1.2 Numerische Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung

Für die numerische Lösung von (6) wird diese mittels Division durch m auf

$$\ddot{y} = g - \frac{1}{m} \left(\left(\frac{p_0 V_0^\kappa}{(V_0 - Ay)^\kappa} - p_0 \right) A \right) =: f(y) \quad (7)$$

umgeformt und die rechte Seite mit $f(y)$ abgekürzt. Da (6) bzw. (7) Ordnung 2 hat, benötigt man zur Lösung 2 Startwerte

$$y(t=0) = y_0 \text{ und} \quad (8)$$

$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0. \quad (9)$$

Um die Rückführung der zu lösenden Differentialgleichung 2. Ordnung auf ein System von 2 Differentialgleichungen 1. Ordnung zu vermeiden, wird der 1. Schritt als Taylor-Startschritt ausgeführt. Dazu wird die 2. Ableitung von y durch einen geeigneten Differenzenquotienten mit hinreichend kleinem Δt approximiert. Man erhält, diskretisiert auf einem äquidistanten Gitter mit der Schrittweite Δt , d.h. $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$,

$$\ddot{y}(t_0) \approx \frac{\frac{y_1 - y_0}{\Delta t} - \dot{y}_0}{\frac{\Delta t}{2}}, \quad (10)$$

bzw. eingesetzt in (7) und umgeformt auf y_1

$$y_1 = y_0 + \Delta t \dot{y}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} f(y_0). \quad (11)$$

Für $i \geq 2$ gilt für die 2. Ableitung

$$\ddot{y}(t_{i-1}) \approx \frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta t^2}. \quad (12)$$

Eingesetzt in (7) erhält man

$$y_i = 2y_{i-1} - y_{i-2} + \Delta t^2 f(y_{i-1}). \quad (13)$$

Bemerkung: Für das konkrete Zahlenbeispiel von Abschnitt 3 setzen wir $y_0 \neq 0$ und $\dot{y}_0 = 0$.

2 Lineare Betrachtung

2.1 Herleitung der linearisierten Bewegungsgleichung

Für die Linearisierung von (6) gehen wir von (4) aus. Auflösen der zweiten Klammer auf der rechten Seite ergibt unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung

$$p_0 V_0^\kappa = (p_0 + \Delta p)(V_0^\kappa - \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V + \dots). \quad (14)$$

Multipliziert man die Klammern auf der rechten Seite weiter aus, gelangt man zu

$$p_0 V_0^\kappa = p_0 V_0^\kappa - \kappa p_0 V_0^{\kappa-1} \Delta V + \Delta p V_0^\kappa - \kappa \Delta p V_0^{\kappa-1} \Delta V + \dots \quad (15)$$

Unter der Annahme, dass y klein ist, sind auch $\Delta V = Ay$ und gemäß (1) Δp klein, wodurch der letzte Term in obiger Gleichung gemäß „klein · klein = sehr klein“ vernachlässigt wird. Aus dem Rest folgt durch Vereinfachung und Umformung in erster Näherung

$$\Delta p = \frac{\kappa p_0}{V_0} \Delta V. \quad (16)$$

Setzt man diesen Zusammenhang unter Berücksichtigung von $\Delta V = Ay$ in (3) ein, erhält man die linearisierte Bewegungsgleichung für den betrachteten Kolben

$$m\ddot{y} = mg - \frac{\kappa p_0 A^2}{V_0} y. \quad (17)$$

2.2 Analytische Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung

Formt man (17) auf

$$m\ddot{y} + \frac{\kappa p_0 A^2}{V_0} y = mg \quad (18)$$

um erkennt man, dass die Gleichung die „Bauform“ der Schwingungsgleichung des harmonischen Oszillators hat. Der Ansatz zur Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung lautet²

$$y_h = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \quad (19)$$

wobei C_1 und C_2 Konstanten zur Anpassung an die Anfangsbedingungen sind und ω die Kreisfrequenz bezeichnet. Differenziert man den Ansatz zweimal nach t und setzt man die Funktion y_h und die zugehörige zweite Ableitung

$$\ddot{y}_h = -\omega^2 C_1 \sin(\omega t) - \omega^2 C_2 \cos(\omega t) \quad (20)$$

in die homogene Differentialgleichung ein, erhält man

$$-m\omega^2 (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)) + \frac{\kappa p_0 A^2}{V_0} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)) = 0. \quad (21)$$

Daraus ergibt sich durch Vereinfachung und Umformung für die Kreisfrequenz ω der Schwingung

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa p_0 A^2}{m V_0}}. \quad (22)$$

Mit dem bekannten Zusammenhang $\omega = 2\pi f$ ergibt sich für die Frequenz f somit

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa p_0 A^2}{m V_0}}. \quad (23)$$

Für die vollständige Lösung von (17) muss noch die Inhomogenität mg der rechten Seite von (17) berücksichtigt werden. Im eingeschwungenen Zustand (=Ruhelage, RL) gilt für die Beschleunigung $\ddot{y} = 0$, wodurch sich die Bewegungsgleichung zu

$$\frac{\kappa p_0 A^2}{V_0} y_{RL} = mg \quad (24)$$

vereinfacht. Drückt man hieraus

$$y_{RL} = \frac{mgV_0}{\kappa p_0 A^2} \quad (25)$$

aus, erhält man durch Addition der beiden Lösungen $y = y_h + y_{RL}$ die Gesamtlösung der Bewegungsgleichung

$$y = C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + \frac{mgV_0}{\kappa p_0 A^2} \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{\kappa p_0 A^2}{m V_0}}. \quad (26)$$

Für die Anpassung an die Anfangsbedingungen $y_0 \neq 0$ und $\dot{y}_0 = 0$ des Beispiels aus Abschnitt 3 geht man wie folgt vor: Für die Lösung (26) und ihre erste Ableitung an der Stelle $t = 0$ gilt

$$y(0) = y_0 = \underbrace{C_1 \sin(\omega \cdot 0)}_{=0} + \underbrace{C_2 \cos(\omega \cdot 0)}_{=1} + \frac{mgV_0}{\kappa p_0 A^2} \Rightarrow C_2 = y_0 - \frac{mgV_0}{\kappa p_0 A^2}, \quad (27)$$

$$\dot{y}(0) = 0 = \underbrace{C_1 \omega \cos(\omega \cdot 0)}_{=1} - \underbrace{C_2 \omega \sin(\omega \cdot 0)}_{=0} \Rightarrow C_1 = 0. \quad (28)$$

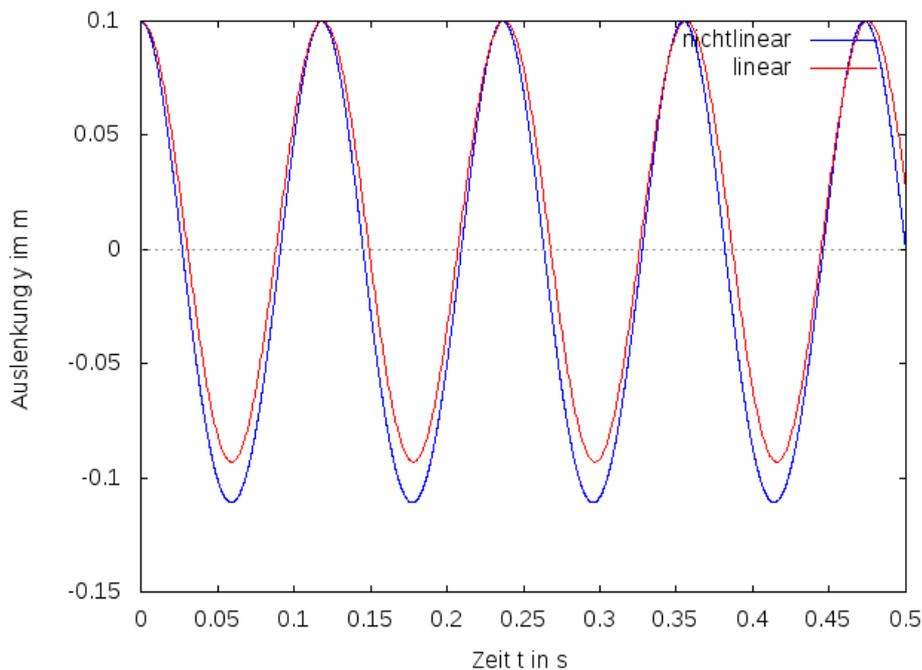
Die an die Anfangsbedingungen angepasste Lösung lautet somit

$$y = \left(y_0 - \frac{mgV_0}{\kappa p_0 A^2} \right) \cos(\omega t) + \frac{mgV_0}{\kappa p_0 A^2} \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{\kappa p_0 A^2}{m V_0}}. \quad (29)$$

²Wir suchen eine Funktion, die sich bei zweimaliger Differentiation bis auf das Vorzeichen und eine Konstante selbst reproduziert: Das sind die sin- und die cos-Funktion.

3 Vergleich

Das folgende Diagramm zeigt einen Vergleich der numerischen Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung (blau) mit der analytischen Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung (rot) auf Basis obiger Ausführungen und des darunter anschließenden Maxima-Codes, aus welchem auch die gewählten Parameter entnommen werden können.



```
(%i1) kill(all);
    Alle Einheiten in SI!
(%i4) m:1.;
g:9.81;
p0:float(10^5);
V0:0.005;
A:0.01;
kappa:1.4;

(%i7) tend:0.5;
deltat:0.0001;
N:round(tend/deltat);
(%i9) y[0]:0.1;
v[0]:0;
(%i10) y[1]:y[0]+v[0]*deltat+deltat^2/2*1/m*(m*g-((p0*V0^kappa)/(V0-A*y[0])^kappa-p0)*A);
(%i11) for i:2 thru N do block(
    y[i]:float(2*y[i-1]-y[i-2]+deltat^2*1/m*(m*g-((p0*V0^kappa)/(V0-A*y[i-1])^kappa-p0)*A))
);
(%i12) yliste_nl:makelist([i*deltat,y[i]],i,0,N)$
(%i17) omega:sqrt(kappa*p0*A^2/(V0*m));
(%i18) ylin2:expand(float((y[0]-m*g*V0/(kappa*p0*A^2))*cos(omega*t)+m*g*V0/(kappa*p0*A^2)));
(%i19) wxplot2d([[discrete,yliste_nl],ylin2],[t,0,tend],[legend,"nichtlinear","linear"],
    [xlabel,"Zeit t in s"],[ylabel,"Auslenkung y im m"]])$
(%i20) plot2d([[discrete,yliste_nl],ylin2],[t,0,tend],[legend,"nichtlinear","linear"],
    [xlabel,"Zeit t in s"],[ylabel,"Auslenkung y im m"],
    [gnuplot_term,eps],[gnuplot_out_file,
    "/home/martin/Escuela/6-7-8-PH-Wapfl/33-Luftfeder/Luftfeder-Diagramm.eps"]);
```