Eine allgemeine Formulierung für die Beschreibung von Stößen

Der vorliegende Artikel beschreibt den Weg zu einer allgemeinen Formulierung für die Berechnung von zentralen Stößen. Ausgehend vom „üblichen“ Ansatz für den vollkommen elastischen Stoß wird eine Formel für die Stoßzahl aufgestellt, welche anschließend in Kombination mit dem Impulserhaltungssatz (IES) und dem Energieerhaltungssatz (EES) in einer universellen Formulierung für den teilelastischen Stoß verwendet wird.

1 „Herleitung“ einer Formel für die Stoßzahl

Die Formel für die Stoßzahl ist streng genommen nicht herleitbar. Trotzdem soll hier ein Weg beschritten werden, der einer Herleitung nahe kommt. Die Sinnhaftigkeit der Definition dieser Größe soll sozusagen plausibel gemacht werden.

Wir starten mit der Betrachtung eines zentralen vollkommen elastischen Stoßes. Die Größen m_1 und m_2 bezeichnen die Massen der beiden Stoßpartner, v_1 und v_2 die zugehörigen Geschwindigkeiten vor dem Stoß, sowie u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten nach dem Stoß. Für den IES und EES gelten

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, & (1) \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. & (2) \end{aligned}$$

Durch Umformung von (1) und (2) erhält man

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= m_2(u_2 - v_2), & (3) \\ \frac{1}{2} m_1 \left(v_1^2 - u_1^2\right) &= \frac{1}{2} m_2 \left(u_2^2 - v_2^2\right). & (4) \end{aligned}$$

Dividiert man (4) durch (3), erhält man mit $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ und anschließendem Kürzen

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2, \tag{5}$$

bzw. weiter

$$1 = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \tag{6}$$

⇒ Bei jedem vollkommen elastischen Stoß ist der Quotient der Geschwindigkeitsdifferenzen nach und vor dem Stoß konstant 1.

Beim vollkommen unelastischen Stoß bleiben die Stoßpartner nach dem Stoß aneinander haften und bewegen sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit $u = u_1 = u_2$. Daraus ergibt sich mit Blick auf die rechte Seite von (6), dass der Bruch

$$\frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2} = \frac{u - u}{v_1 - v_2} = 0 \tag{7}$$

ergibt[1].

Definiert man den Quotienten $\frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}$ als eigene physikalische Größe k, genannt Stoßzahl, gilt

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \tag{8}$$

Obige Ausführungen zeigen, dass die Stoßzahl k für den vollkommen elastischen Stoß 1 (siehe Beziehung (6)) und für den vollkommen unelastischen Stoß 0 (siehe Beziehung (7)) ist. Für einen realen, d.h. teilelastischen Stoß ergibt sich somit $k \in \,]0;1[$.

[1]Bemerkung: Die Formel wurde jedoch aus dem Ansatz für den vollkommen elastischen Stoß hergeleitet.

2 Der teilelastische Stoß

Der vollkommen elastische Stoß wird in der Regel durch die Gleichungen (1) und (2) vollständig beschrieben. Da bei diesem Stoß per Definition die ganze vor dem Stoß vorhandene kinetische Energie in dieser Form nach dem Stoß erhalten bleibt, ist die Verlustenergie $\Delta E = 0$. Bei Kenntnis der Geschwindigkeiten vor dem Stoß (v_1 und v_2) und der Massen (m_1 und m_2) können die beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß (u_1 und u_2) berechnet werden (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, $k = 1$).

Der vollkommen unelastische Stoß wird in der Regel durch

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + \Delta E \tag{10}$$

beschrieben. Die Größen u und ΔE bezeichnen darin die gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoß, sowie den Verlust an kinetischer Energie durch Verformung und Wärme. Auch hier lässt sich bei Kenntnis der Geschwindigkeiten vor dem Stoß (v_1 und v_2) und der Massen (m_1 und m_2) die Geschwindigkeit u nach dem Stoß sowie die Verlustenergie ΔE berechnen (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, $k = 0$).

In beiden Fällen reicht somit ein 2×2-System aus, da beim vollkommen elastischen Stoß die Verlustenergie ΔE a priori 0 gesetzt werden kann und beim vollkommen unelastischen Stoß nach dem Stoß nur eine Geschwindigkeit im IES und EES (siehe (9) und (10)) auftaucht. Gleichung (8) für die Stoßzahl wird in beiden Fällen nicht benötigt.

Will man beim teilelastischen Stoß für $k \in]0;1[$ die Geschwindigkeiten nach dem Stoß u_1 und u_2, nicht aber den Energieverlust ΔE berechnen, so gelingt dies mit dem Ansatz

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \tag{11}$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}. \tag{12}$$

Der zugehörige EES wird nicht benötigt.

3 Allgemeine Formulierung

Kombiniert man alle 3 Gleichungen IES, EES und die Formel für die Stoßzahl (8) in ihrer allgemeinen Form,

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 + \Delta E, \tag{14}$$

$$k = \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}, \tag{15}$$

erkennt man, dass dieser Ansatz unabhängig von der Art des Stoßes (vollkommen elastisch, vollkommen unelastisch und teilelastisch) gültig ist. Löst man dieses 3×3-System, erhält man

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_2(v_2 - v_1)k}{m_1 + m_2}, \tag{16}$$

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1(v_1 - v_2)k}{m_1 + m_2}, \tag{17}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2\left(1 - k^2\right). \tag{18}$$

Setzt man für den vollkommen elastischen Stoß $k = 1$ in (16), (17) und (18) ein, erhält man

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}, && (19)\\
u_2 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}, && (20)\\
\Delta E &= 0. && (21)
\end{aligned}
$$

Die Lösungen (19) und (20) erhält man auch, wenn man (1) und (2) löst.

Setzt man für den vollkommen unelastischen Stoß $k = 0$ in (16), (17) und (18) ein, erhält man

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, && (22)\\
u_2 &= \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, && (23)\\
\Delta E &= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)^2. && (24)
\end{aligned}
$$

Die Lösungen (22) und (23) sind ident, d.h. $u_1 = u_2 = u$. Die Lösungen für u und ΔE erhält man auch, wenn man (9) und (10) löst.

Durch die Erweiterung von 2 auf 3 Gleichungen und geeignete Wahl der Stoßzahl k, erhält man, ohne dass man vorab die Art des Stoßes in den Ansatz einfließen lassen muss ($\Delta E = 0$ für den vollkommen elastischen Stoß bzw. $u_1 = u_2 = u$ für den vollkommen unelastischen Stoß), die Lösungen für alle 3 Fälle. Es reicht die Kenntnis der Stoßzahl: $k = 1\ldots$ vollkommen elastisch, $k = 0\ldots$ vollkommen unelastisch, bzw. $k \in]0;1[\ldots$ teilelastisch.

Für teilelastische Stöße lässt sich die Stoßzahl experimentell bestimmen.