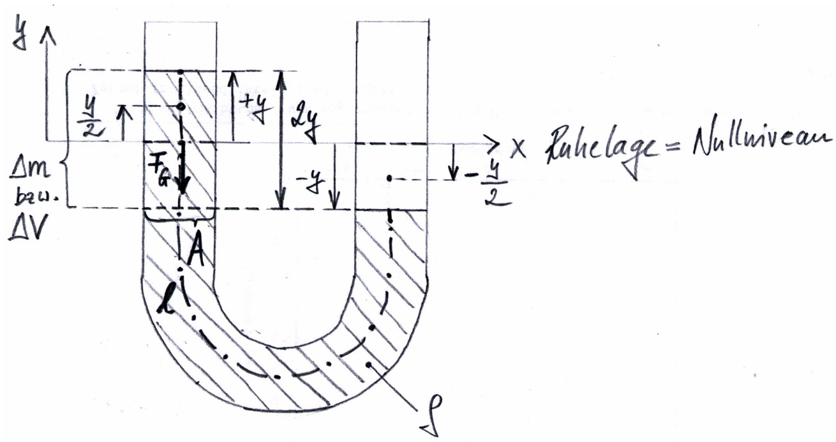
Das U-Rohr-Pendel

Der vorliegende Artikel beschreibt das Schwingen der Flüssigkeitssäule in einem U-Rohr. In den ersten beiden Abschnitten wird auf zwei verschiedene Arten unter Vernachlässigung der Reibung die Bewegungsgleichung (für die Flüssigkeitsoberfläche) hergeleitet, die im dritten Abschnitt gelöst wird.

1 Herleitung der Bewegungsgleichung mit dem 2. Newtonschen Gesetz

Skizze:



Betrachtet man, wie in obiger Skizze dargestellt, die Flüssigkeit mit der Dichte ρ im ausgelenkten Zustand (Elongation $y = y(t)$), erkennt man, dass die rückstellende Kraft die Gewichtskraft F_G der durch die Höhendifferenz $2y$ gebildeten Flüssigkeitssäule ist. Gemäß dem 2. Newtonschen Gesetz gilt (m=Gesamtmasse der Flüssigkeit) somit

$$m\ddot{y} = -F_G, \tag{1}$$

wobei F_G wie folgt berechnet werden kann

$$F_G = \Delta m\, g = \underbrace{A\,2y}_{=\Delta V}\,\rho\, g. \tag{2}$$

Hierin bezeichnen ρ die Dichte der Flüssigkeit und g die Erdbeschleunigung. Durch Einsetzen von F_G in das 2. Newtonsche Gesetz erhält man

$$m\ddot{y} = -A\,2y\,\rho\, g, \tag{3}$$

wodurch man nach Umstellen der Terme zu

$$m\ddot{y} + 2A\rho g\, y = 0, \tag{4}$$

und mit $m = A\,l\,\rho$ (l=Gesamtlänge der „gekrümmten" Flüssigkeitssäule) zu

$$A\,l\,\rho\,\ddot{y} + 2A\rho g\, y = 0, \tag{5}$$

bzw.

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l}\, y = 0 \tag{6}$$

gelangt.

2 Herleitung der Bewegungsgleichung mit dem Energieerhaltungssatz

Gemäß dem Energieerhaltungssatz und obiger Skizze gilt

$$E_{ges} = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{y}^2}_{=E_{kin}} + \underbrace{A\,y\,\rho\,g\,\frac{y}{2} - A\,y\,\rho\,g\left(-\frac{y}{2}\right)}_{=E_{pot}} = const., \tag{7}$$

bzw. vereinfacht

$$\frac{m}{2}\dot{y}^2 + A\,\rho\,g\,y^2 = const.. \tag{8}$$

Man beachte, dass der Schwerpunkt des linken Flüssigkeitsabschnittes $\frac{y}{2}$ über dem Nullniveau liegt. Analog liegt der Schwerpunkt des auf der rechten Seite „fehlenden" Flüssigkeitsabschnittes $-\frac{y}{2}$ unter dem Nullniveau.

Leitet man den letzten Zusammenhang unter der Berücksichtigung von $y = y(t)$ nach der Zeit t ab, erhält man (durch fortgesetztes Differenzieren)

$$\frac{m}{2}2\dot{y}\ddot{y} + A\,\rho\,g\,2y\dot{y} = 0, \tag{9}$$

bzw. mit $m = A\,l\,\rho$ (siehe oben)

$$\dot{y}\cdot(A\,l\,\rho\,\ddot{y} + 2A\,\rho\,g\,y) = 0. \tag{10}$$

Mittels des Satzes von der Nullteilerfreiheit folgt einerseits der physikalisch „uninteressante" Fall $\dot{y} = 0$ bzw. nach Vereinfachung des Ausdrucks in der Klammer

$$A\,l\,\rho\,\ddot{y} + 2A\,\rho\,g\,y = 0 \tag{11}$$

die (aus dem vorigen Abschnitt bereits bekannte) gesuchte Bewegungsgleichung

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l}\,y = 0. \tag{12}$$

3 Lösung der Bewegungsgleichung

Die Bewegungsgleichung ist eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung, welche mit dem Ansatz ($y = y(t)$)

$$y = y_0\,\sin(\omega\,t + \varphi_0) \tag{13}$$

gelöst werden kann. Hierin bezeichnen y_0 die Amplitude der Schwingung, ω die Kreisfrequenz und φ_0 den Nullphasenwinkel.

Nach zweimaliger Differentiation des Ansatzes

$$\ddot{y} = -y_0\,\omega^2\,\sin(\omega\,t + \varphi_0) \tag{14}$$

und Einsetzen in die Bewegungsgleichung erhält man

$$-y_0\,\omega^2\,\sin(\omega\,t + \varphi_0) + \frac{2g}{l}\,y_0\,\sin(\omega\,t + \varphi_0) = 0 \tag{15}$$

bzw. nach Umformung

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}}. \tag{16}$$

Mit dem bekannten Zusammenhang $\omega = 2\pi f$, kann die Schwingungsfrequenz f berechnet werden

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}. \tag{17}$$

Diskussion:

1. Die Schwingungsfrequenz hängt, wie beim Fadenpendel, nur von der Pendellänge l (hier Gesamtlänge der Flüssigkeitssäule, siehe Skizze) und der Erdbeschleunigung ab.

2. Die Frequenz ist unabhängig von der Dichte der verwendeten Flüssigkeit.

3. Für eine realistischere Modellierung müsste die innere Reibung der Flüssigkeit sowie die Reibung zwischen Flüssigkeit und Rohr berücksichtigt werden.