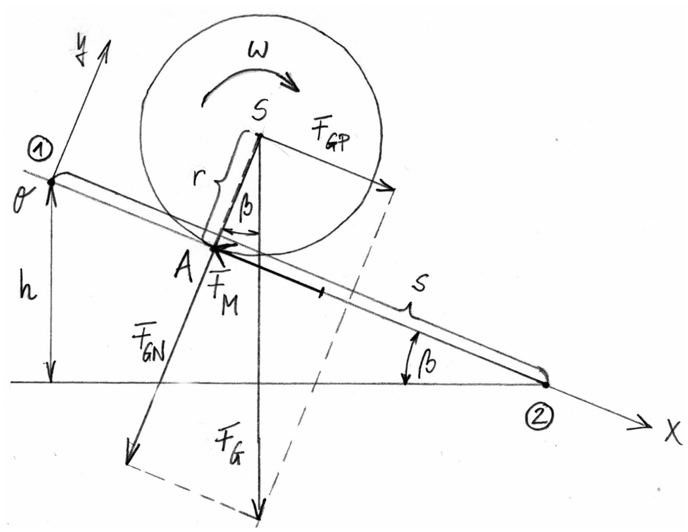
Abrollen eines Zylinders auf der schiefen Ebene

Der vorliegende Artikel beschreibt ohne Berücksichtigung der Reibung das Abrollen eines Zylinders auf der schiefen Ebene. Auf vier verschiedene Arten wird eine Formel für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Strecke s bei einem Neigungswinkel β zur Horizontalen und Anfanggeeschwindigkeit $v_0 = 0$ hergeleitet. Dazu wird jeweils die Bewegungsgleichung oder der Energieerhaltungssatz entweder für den Schwerpunkt S des als homogen angenommenen Zylinders oder für den Kontaktpunkt A (korrekter die Kontaktstrecke) als Bezugspunkt für die Herleitung herangezogen (siehe Skizze 1).

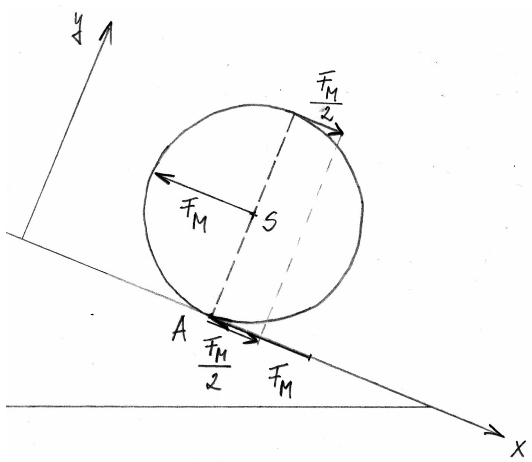
Skizze 1:



1 Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt

Für das Aufstellen der Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt S ist eine Vorüberlegung notwendig, da die das Drehmoment M verursachende Kraft F_M nicht im Schwerpunkt des Zylinders angreift (Skizze 1).

Skizze 2:



Die beiden zusätzlichen Kräfte $\frac{F_M}{2}$ und die zusätzliche Kraft F_M (ausgehend von S, siehe Skizze 2) verändern weder das am Zylinder wirkende Drehmoment, da $M = F_M\, r = \frac{F_M}{2}\, r + \frac{F_M}{2}\, r$, noch die Bewegung des Schwerpunktes S selbst, da $-F_M + \frac{F_M}{2} + \frac{F_M}{2} = 0$ gilt. Es wird jedoch sichtbar, dass im Schwerpunkt S die Kraft $-F_M$ angreift.

Für die Bewegungsgleichung gilt somit

$$ma = F_{GP} - F_M, \tag{1}$$

wobei $F_{GP} = mg\sin(\beta)$ die Parallelkomponente der Gewichtskraft $F_G = mg$ bezeichnet ($g\ldots$ Erdbeschleunigung). Für F_M gilt gemäß Skizze 1

$$F_M = \frac{M}{r} = \frac{I_S\alpha}{r} = \frac{\frac{1}{2}mr^2\,\alpha}{r} = \frac{1}{2}mr\alpha = \frac{1}{2}ma, \tag{2}$$

wobei $I_S = \frac{1}{2}mr^2$ das Trägheitsmoment des Zylinders bezüglich des Schwerpunktes S, M das Drehmoment, α die Winkelbeschleunigung und $a = r\alpha$ die Beschleunigung bezeichnen. Eingesetzt erhält man

$$ma = mg\sin(\beta) - \frac{1}{2}ma. \tag{3}$$

Nach Umformung erhält man

$$a = \frac{2}{3}g\sin(\beta), \tag{4}$$

bzw. mit der zeitfreien Gleichung

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin(\beta)}. \tag{5}$$

2 Energieerhaltungssatz für den Schwerpunkt

Der Energieerhaltungssatz bezüglich S lautet

$$E_{p,1} = E_{kt,2} + E_{kr,2}, \tag{6}$$

wobei $E_{p,1} = mgh$ ($h\ldots$ Höhe über dem Nullniveau) die potentielle Energie in Punkt 1 und $E_{kt,2} = \frac{1}{2}mv^2$ ($v\ldots$ Translationsgeschwindigkeit) bzw. $E_{kr,2} = \frac{1}{2}I_S\omega^2$ ($\omega\ldots$ Winkelgeschwindigkeit) die translatorische kinetische bzw. die rotatorische kinetische Energie in Punkt 2 bezeichnen. Ausformuliert gilt

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2. \tag{7}$$

Setzt man für $I_S = \frac{1}{2}mr^2$ und für $h = s\sin(\beta)$ ein, so erhält man

$$mgs\sin(\beta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2\omega^2, \tag{8}$$

bzw. mit $v = r\omega$, bzw. nach Division durch m und Umformung/Vereinfachung

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin(\beta)}. \tag{9}$$

3 Bewegungsgleichung bezüglich der Kontaktstrecke

In Analogie zum 2. Newtonschen Gesetz bezüglich der Kontaktstrecke A gilt

$$I_A\,\alpha = F_{GP}\,r, \tag{10}$$

wobei für das Trägheitsmoment gemäß dem Satz von Steiner $I_A = I_S + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$ gilt. Eingesetzt erhält man

$$\frac{3}{2}mr^2\alpha = mgr\sin(\beta). \tag{11}$$

Dividiert man die Gleichung durch mr, führt dies unter Berücksichtigung von $a = r\alpha$ und weiterer Umformung zu

$$a = \frac{2}{3}g\sin(\beta), \tag{12}$$

und in weiterer Folge mittels der zeitfreien Gleichung zu

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin(\beta)}. \tag{13}$$

4 Energieerhaltungssatz bezüglich der Kontaktstrecke

Für die Rotation des Zylinders bezüglich der Kontaktstrecke A gilt

$$E_{p,1} = E_{k,2} \tag{14a}$$
$$mgh = \frac{1}{2} I_A \omega^2. \tag{14b}$$

Setzt man für $h = s\sin(\beta)$ und (wie oben erklärt) für $I_A = \frac{3}{2}mr^2$ ein, erhält man

$$mgs\sin(\beta) = \frac{1}{2}\frac{3}{2}mr^2\omega^2, \tag{15}$$

was unter Ausnutzung von $v = r\omega$ und weiterer Vereinfachung, insbesondere Division durch m, zu

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gs\sin(\beta)} \tag{16}$$

umgeformt werden kann.

Fazit: Vier Ansätze, eine Lösung, das macht glücklich! ☺